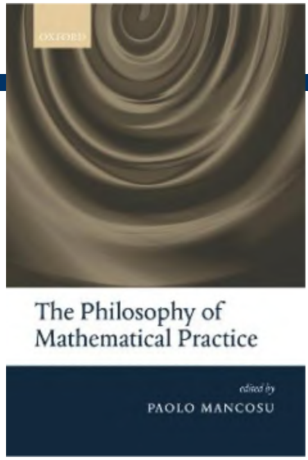
Conférence inaugurale
de la Chaire d'excellence internationale Blaise Pascal

HISTOIRE ET PHILOSOPHIE DE L'INFINI MATHÉMATIQUE

Vendredi 3 décembre 2021

Paolo Mancosu
Department of Philosophy, UC Berkeley
Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Giorgio de Chirico, La lassitude de l'infini, 1912

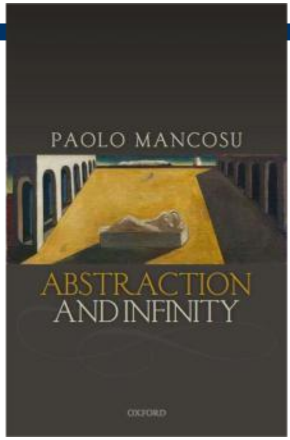


Résumé du projet de recherche

Le projet consiste en des recherches et des activités concernant l'histoire et la philosophie des mathématiques dans un ensemble de domaines touchant à l'infini. Le cadre général de mon travail est la philosophie de la pratique mathématique. Il s'agit d'une approche de la philosophie de la logique et des mathématiques qui accorde une grande importance à la pratique mathématique (couvrant tout type de domaine mathématique) comme source de réflexion philosophique. L'attention portée à la pratique mathématique implique également une considération particulière des racines historiques des problèmes étudiés.

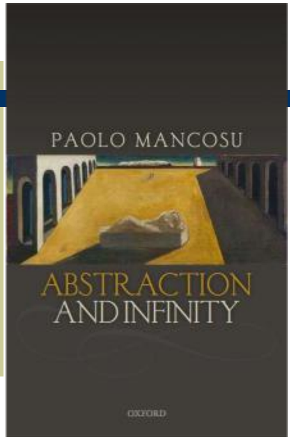
Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE



Résumé du projet de recherche

À partir d'un développement récent, à savoir la théorie des numérosités, je propose un large éventail de recherches historiques, mathématiques et philosophiques profondément interconnectées. La motivation de ces recherches est double : d'une part, étudier les sources de notre connaissance des nombres, des probabilités et, d'autre part, apporter de nouvelles contributions substantielles concernant des domaines de discussion parmi les plus centraux de la philosophie contemporaine des mathématiques et de la philosophie des probabilités en ce qui concerne l'infini.



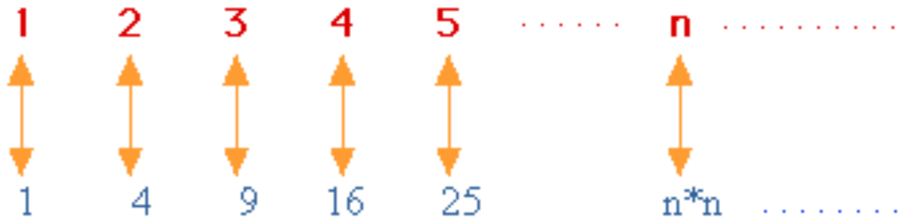
Contexte

Dans *Abstraction and Infinity* (2017) j'ai exploré la manière dont la récente théorie des numérosités (Benci, Forti et Di Nasso) permet d'étendre le comptage fini aux ensembles infinis. Ceci permet de préserver (contrairement à la notion de cardinalité de Cantor) le principe partie-tout (tel qu'il avait été proposé, par exemple, par Bolzano). Ce principe s'énonce comme suit : si un ensemble A est strictement inclus dans B, la « taille » ou la « numérosité » de A doit être strictement inférieure à celle de B. L'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers pairs ont effectivement la même cardinalité alors que l'un est contenu dans l'autre. Ce développement mathématique m'a conduit à un ensemble de nouveaux domaines d'investigation que je décris dans trois sections distinctes, bien que les sujets soient étroitement liés.

Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

Section I. L’histoire de l’infini.

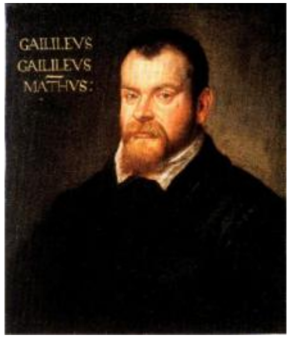


L’histoire de l’infini (et la notion de « même taille » pour les collections/ensembles) a été l’otage de la domination quasi totale de la notion de cardinalité de Cantor. La cardinalité cantorienne se définit à partir d’un critère de similitude de « taille ». Deux ensembles ont la même cardinalité si et seulement s’il existe une correspondance bijective entre les éléments des ensembles. Appelons ce critère BIUNIVOCITÉ. Un critère différent, défendu entre autres par Bolzano, repose sur l’intuition partie-tout. Si une collection A est strictement incluse dans B alors la « taille » de A doit être strictement inférieure à la « taille » de B. Appelons ce critère PARTIE-TOUT.

1, 2, 3, **4**, 5, 6, 7, 8, **9**, 10, 11, 12, 13, 14, 15, **16**, ..., **25**, ….

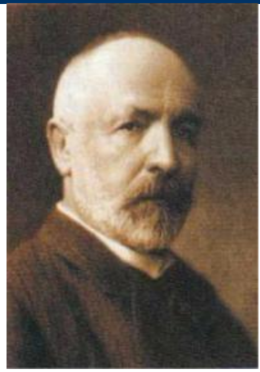
Région îledeFrance UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

Section I. L’histoire de l’infini.

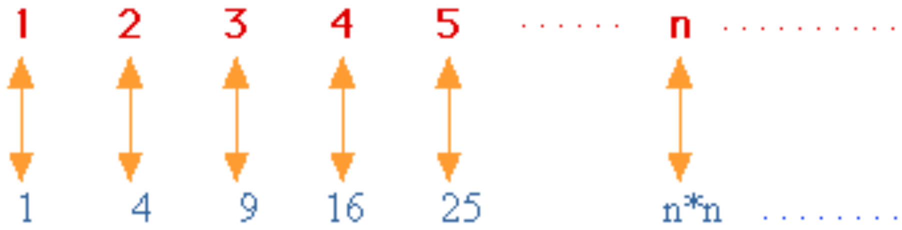


Bien qu’ils accordent sur les collections finies, les principes de BIUNIVOCITÉ et PARTIE-TOUT sont en désaccord dès lors que l’on considère des collections infinies. Les nombres naturels et leurs carrés ont la même taille (cardinalité) selon le principe de BIUNIVOCITÉ mais des tailles différentes selon le principe PARTIE-TOUT.

Cette constatation est à l’origine du paradoxe de Galilée en ce qui concerne le comptage des collections infinies décrit dans *Les deux nouvelles sciences* (1638). Malgré les tentatives de Bolzano, le principe PARTIE-TOUT n’a pas été implémenté comme une théorie mathématique cohérente jusqu’au travail sur la théorie des numérosités par Benci, Forti et Di Nasso, au début des années 2000.



Section I. L’histoire de l’infini.



La théorie des ensembles de Cantor et sa définition de « taille » fondée sur la BIUNIVOCITÉ, a connu un tel succès qu'une sorte de consensus s’est instauré. Consensus que Gödel a continué à fortifier en cherchant à montrer que toute généralisation du comptage du fini à l’infini devait inévitablement aboutir à la solution cantorienne. J’ai critiqué l’argument de l’inévitabilité de Gödel dans mon livre de 2017, un argument qui a gravement affecté de nombreux récits sur l’histoire de l’infini.

Section I. L’histoire de l’infini.

Ce que je veux souligner, ce sont deux erreurs symétriques qui ont gravement affecté de nombreux récits portant sur l’histoire de l’infini. Soit faire l’éloge d’un penseur du passé parce que sa conception de l’infini a préfiguré la construction de Cantor, soit le condamner pour ne pas l’avoir fait. En outre, le préjugé cantorien a souvent amené à une lecture erronée des sources historiques. Je ne répéterai pas ici les nombreuses preuves que j’ai fournies dans mon précédent travail qui retrace la généalogie de BIUNIVOCITÉ et de PARTIE-TOUT dans l’histoire de l’infini.

Section I. L'histoire de l'infini.

Au cours de mes recherches, j'ai identifié une troisième façon d'étendre le comptage du fini à l'infini qui est restée jusqu'à présent en marge de notre conscience historique et dont la particularité est encore une fois restée inaperçue en raison de la prédominance du point de vue cantorien. Je propose de l'appeler le principe de FRÉQUENCE. La première occurrence du principle de fréquence que je connais se trouve dans l'œuvre du mathématicien islamique Ibn Qurra (IXe siècle après J.-C.). Ibn Qurra affirme que les nombres impairs et les nombres pairs ont la même taille, que les multiples de trois sont un tiers des nombres naturels, etc.

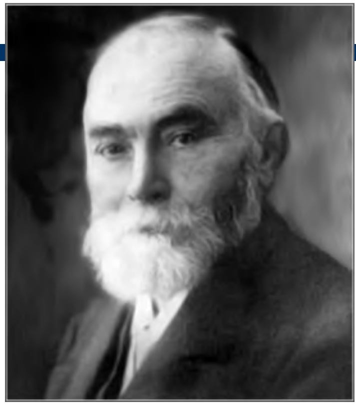
1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, **10**, 11, **12**, 13, **14**, 15, **16**, ...,

1, 2, **3**, 4, 5, **6**, 7, 8, **9**, 10, 11, **12**, 13, 14, **15**, 16, ...,

Région îledeFrance   UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

Section I. L'histoire de l'infini.

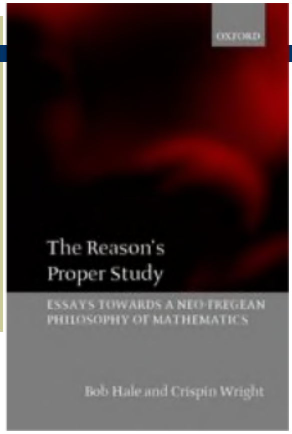
Un de mes objectifs dans ce domaine consiste à retracer les intuitions fréquentistes dans l'histoire de l'infini. En commençant par Ibn Qurra, je voudrais proposer une histoire de l'intuition fréquentiste en passant par Grosseteste, Galilée, Maignan, Bolzano. Je souhaite également décrire le développement de la notion de densité dans la théorie des nombres (fournissant ainsi de nouveaux résultats sur l'émergence de la notion de densité asymptotique dans la théorie des nombres). Le résultat ne se limitera pas seulement aux nouvelles informations historiques qu'une telle étude sera en mesure de fournir, mais il s'agit également d'amener à la pleine conscience philosophique qu'en plus de la BIUNIVOCITÉ et PARTIE-TOUT, l'histoire de l'infini doit prendre en compte le rôle de la FRÉQUENCE.



Section II. Investigations philosophiques.

II.A Assigner des nombres aux concepts infinis

Comme nous l'avons évoqué précédemment, j'ai exploré dans des publications précédentes les questions historiques, mathématiques et philosophiques liées à la nouvelle théorie des numérosités. Dans ces contributions, j'ai donné une envergure plus générale à certaines inquiétudes spécifiques émergeant de la théorie des numérosités. Cette généralisation prend la forme d'une réflexion aboutissant à ce que j'ai qualifié d'objection de « bonne compagnie » au principe de Hume. Ce dernier attribue des « tailles » aux concepts, (il s'agit de l'équivalent frégéen de sous-ensemble d'un domaine) en utilisant le critère cantorien de correspondance un à un. Permettez-moi de commencer par rappeler quelques faits essentiels concernant le principe de Hume et le néo-logicisme.



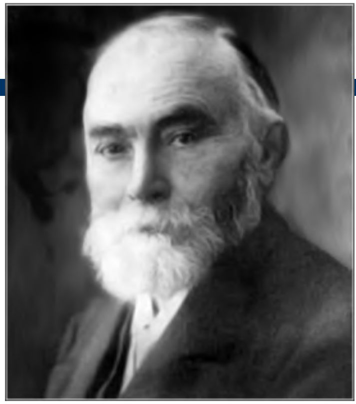
Section II. Investigations philosophiques.

II.A Assigner des nombres aux concepts infinis

Le néo-logicisme (Hale et Wright 2001) est une tentative pour faire revivre le programme logiciste de Frege en affirmant que des parties importantes des mathématiques, comme l'arithmétique du second ordre, peuvent être démontrées comme étant analytiques ou presque analytiques. Cette affirmation repose sur un théorème logico-mathématique et un ensemble d'arguments philosophiques. Le théorème est appelé théorème de Frege, à savoir que la logique du second ordre avec un seul axiome supplémentaire, connu sous le nom de principe de Hume, implique déductivement (moyennant certaines définitions appropriées) les axiomes ordinaires de l'arithmétique du second ordre. L'ensemble des objections philosophiques est lié au statut (logique et épistémique) du principe de Hume.

Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE



Section II. Investigations philosophiques.

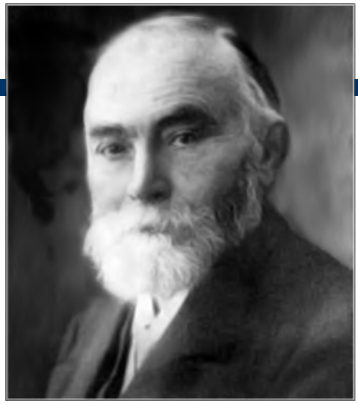
II.A Assigner des nombres aux concepts infinis

Rappelons que dans le contexte fregéen, les systèmes du second ordre ont des variables pour les concepts et les objets (individus). De plus, nous avons des fonctionnelles qui, lorsqu'elles sont appliquées aux concepts, produisent des objets comme valeurs. On note # le symbole de la fonctionnelle. La signification intuitive de # est celle d'une fonctionnelle qui, appliquée aux concepts, produit un nombre. Le principe de Hume (ci-après HP) a la forme suivante :

HP $\quad (B)(C)\ [\#x{:}(Bx) = \#x{:}(Cx) \text{ ssi } B \approx C]$

où $B \approx C$ est l'abréviation d'une des nombreuses formules équivalentes de la logique pure du second ordre exprimant « qu'il existe une correspondance bijective entre les objets qui tombent sous B et ceux qui tombent sous C ».

Région îledeFrance — Université Paris 1 Panthéon Sorbonne



Section II. Investigations philosophiques.

II.A Assigner des nombres aux concepts infinis

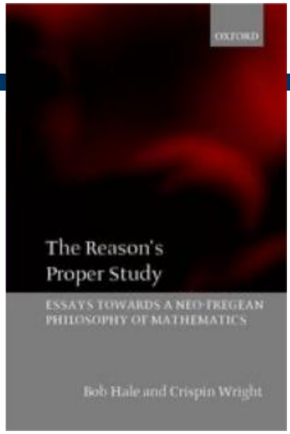
Les principes comme HP qui définissent une fonction à partir d'une relation d'équivalence sont appelés principes d'abstraction. Un autre principe d'abstraction qui sera nécessaire plus tard est la Loi fondamentale V, une abstraction incohérente (comme l'a montré Russell), postulée par Frege dans *Les lois fondamentales de l'arithmétique*. Elle a la forme suivante:

(BLV) $(B)(C)\ [\varepsilon x{:}(Bx) = \varepsilon x{:}(Cx)$ ssi $(x)(Bx \leftrightarrow Cx)]$

Pour résumer, deux concepts ont la même « extension » (εx :(Bx) représente l'extension du concept B(x)) si et seulement si tout objet qui tombe sous le premier tombe sous le second et vice versa. Il est important de souligner que HP et BLV jouent tous deux le rôle d'axiomes de l'infini. En ajoutant HP à la logique du second ordre, nous générons automatiquement tous les nombres naturels. Il en va de même avec BLV, qui produit une infinité d'objets.

Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE



Section II. Investigations philosophiques.

II.A Assigner des nombres aux concepts infinis

Dans plusieurs publications (2015, 2017), j’ai montré qu’il existe une infinité dénombrable de principes d'abstraction qui sont « bons », au sens où ils partagent les mêmes qualités que le Principe de Hume (ils sont cohérents, etc.) et à partir desquels on peut dériver les axiomes de l’arithmétique du second ordre. Il s’agit d’un résultat important tant sur le plan technique que philosophique, car jusqu’à présent, seul le Principe de Hume était considéré comme capable d’un tel exploit. J’ai ensuite formulé une objection de « bonne compagnie » selon laquelle aucun de ces principes ne peut être analytique, car ils sont tous cohérents, mais ils s’excluent mutuellement.

Section II. Investigations philosophiques.
II.A Assigner des nombres aux concepts infinis

Enfin, dans mes recherches, j'ai fourni une taxonomie provisoire des réponses néo-logicistes possibles à l'objection de la « bonne compagnie » et j'ai affirmé que parmi les trois positions que j'ai distinguées (néologicisme conservateur, modéré et libéral), la position modérée était celle qui avait le plus de chances de sortir indemne de cette objection. Selon mon évaluation, la position modérée pouvait résoudre, mieux que les positions radicale et conservatrice, le problème d'identification transsortale pour les abstractions produites par les différents principes d'abstraction (à savoir, sur quelle base peut-on identifier les nombres naturels produits par un principe avec les nombres naturels produits par un autre principe?). Mais aujourd'hui je pense que même le néo-logiciste modéré se trouve confronté à un problème majeur.

Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

Section II. Investigations philosophiques.
II.B Probabilité

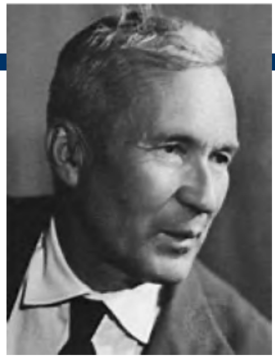
L'existence d'alternatives au Principe de Hume (c'est-à-dire les bons compagnons du Principe de Hume) conduit à un ensemble plus général de préoccupations.

1) Si nous avons différentes possibilités conceptuelles concernant la généralisation du comptage des nombres finis à l'infini, quels critères deviennent pertinents pour favoriser une façon de compter plutôt qu'une autre ?

2) Comment la nouvelle théorie des numérosités peut-elle nous aider à comprendre (ou même à résoudre) le problème de la « Loterie de Dieu » en théorie des probabilités ?

Section II. Investigations philosophiques.
II.B Probabilité

La loterie de Dieu est une loterie dans laquelle Dieu choisit un nombre parmi l'ensemble des nombres entiers positifs (on parle aussi de loterie de de Finetti). La loterie de Dieu est supposée être équitable en ce sens que la probabilité qu'un nombre donné soit choisi est la même que celle de tout autre nombre. Dans l'axiomatisation des probabilités de Kolmogorov, il n'y a tout simplement aucun moyen de rendre compte d'une loterie infinie équitable sur les nombres naturels. Chaque fois que nous sommes confrontés à un défi de ce type, nous devons chercher un équilibre subtil entre les exigences fondationelles et les exigences conceptuelles. Il est évident qu'il faut renoncer à un ou plusieurs des principes qui permettent de rendre compte des loteries finies équitables. Mais cette renonciation ne peut émerger qu'à la suite d'une dialectique entre la cohérence mathématique et les *desiderata* intuitifs.



Section II. Investigations philosophiques.
II.B Probabilité

Les nouvelles théories des probabilités infinitésimales peuvent, à cet égard, nous aider. Voici une liste de *desiderata* que l'on peut satisfaire avec les infinitésimaux.

1. **Régularité.** La probabilité de chaque événement possible doit être strictement plus grande que celle de l'événement impossible.
2. **Totalité.** Une valeur de probabilité doit être attribuée à chaque élément de l'espace des événements.
3. **Additivité parfaite.** La probabilité d'une union arbitraire d'événements mutuellement disjoints doit être égale à la somme des probabilités des événements séparés, où la « somme » doit être définie de manière appropriée.
4. **Laplacisme faible** La théorie des probabilités devrait permettre une distribution de probabilité uniforme sur l'espace d'échantillonnage.

Section II. Investigations philosophiques.
II.B Probabilité

Variétés d'approches infinitésimales. Lorsque nous passons à une configuration infinitésimale, nous disposons des alternatives suivantes en ce qui concerne le domaine et le codomaine de la fonction de probabilité :

Domaine	**Codomaine**	**Théories**
Standard	Standard	Kolmogorov 1933
Non-archimédien	Standard	Loeb 1975
Non-archimédien	Non-archimédien	Nelson 1987
Standard	Non-archimédien	Benci, HorstenWenmackers 2018

En fonction de ces différents choix, nous avons différentes solutions au problème de l'additivité.

Région îledeFrance — Université Paris 1 Panthéon Sorbonne

Section II. Investigations philosophiques.
II.B Probabilité

Dans cette partie du projet, j'étudie de nouvelles théories des probabilités infinitésimales (qui ont émergé de la théorie des numérosités) et j'explore la manière dont il faut pondérer les différents *desiderata* dans la généralisation de nos intuitions des loteries finies aux loteries infinies. J'ai notamment l'intention d'étudier la question de savoir comment différentes théories des probabilités infinitésimales pourraient satisfaire des *desiderata* intuitifs importants sur la loterie de Dieu. En outre, je souhaite aussi étudier comment certains résultats que j'ai établis pour les opérateurs d'abstraction partie-tout s'appliquent également dans le contexte des questions relatives à la régularité en théorie des probabilités.

Section III. Investigations mathématiques Probabilité : régularité et totalité

Cette partie de l'étude est liée au travail que j'ai effectué avec Benjamin Siskind sur les principes d'abstraction qui satisfont partie-tout (Mancosu & Siskind 2019). Notre résultat est fondé sur un résultat qui remonte à Zermelo : pour tout ensemble X et toute fonction f : P(X) → X, il existe toujours des ensembles A et B tels que A est strictement inclus dans B et f(A)=f(B). Mancosu et Siskind 2019 montre que le résultat peut être renforcé pour donner une généralisation de la preuve de l'incohérence de Loi fondamentale V (BLV) donnée par Russell. On dit qu'un opérateur d'abstraction f satisfait partie-tout si, pour tout concept A et B, si A est strictement inclus dans B alors f(A)≠f(B). L'opérateur d'abstraction ε postulé dans BLV satisfait trivialement partie-tout. Nos résultats affirment qu'en logique pure du second ordre avec un symbole supplémentaire pour l'opérateur f on peut montrer que l'existence d'un opérateur satisfaisant la partie-tout implique déductivement une incohérence.

Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

3 Décembre 2021: *Histoire et Philosophie de l'Infini Mathématique,*
Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne
Janvier 2022-Juin 2022 :

- **Cycle des Conférences** sur *La philosophie des mathématiques (avec un focus particulier sur l'infini)* (10 conférences) ; **IHPST**
- **Séminaire** semestriel (10 séances chacune avec deux intervenants) pour les étudiants et chercheurs de la région Île-de-France sur *L'infini : aspects historiques et épistémologiques du comptage et du raisonnement probabiliste* ; **SPHERE**

Décembre 2022 : *Workshop international* [dates à déterminer].
Décembre 2022 : *Conférence grand public* [date à déterminer].

Un travail d'équipe

La plupart de ces activités seront menées en équipe avec des collègues de l'IHPST, de SPHERE et d'autres institutions parisiennes. Je tiens à remercier les amis et collègues suivants pour leur travail assidu qui a permis de faire de cette Chaire d'excellence internationale Blaise Pascal une réalité :

IHPST : Michel Bourdeau ; Alberto Naibo ; Marco Panza ; Pierre Wagner

SPHERE : Brice Halimi ; David Rabouin ; Sabine Rommevaux-Tani

Autres institutions françaises : Jacques Bouveresse, Jean Dhombres, Gerhard Heinzmann, Giuseppe Longo, Jean Petitot, Jean-Michel Salanskis.

Un travail d'équipe

Je tiens également à remercier ceux qui aident déjà à organiser des événements en collaboration avec la Chaire Blaise Pascal, comme Jean-Jacques Szczecirniarz, Francesca Poggiolesi et Vincenzo de Risi.
Je suis très reconnaissant à la Région Île-de-France pour son généreux soutien à la Chaire Pascal et pour cette opportunité unique. Je tiens également à remercier le soutien financier du Fonds France-Berkeley, de l'IHPST, de SPHERE et du GDR de Philosophie des Mathématiques. Enfin, je remercie chaleureusement tous les membres (professeurs, administrateurs et membres du personnel) de l'Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne, de l'Université de Paris, de l'IHPST, de SPHERE et de la Région Île-de-France qui ont contribué par leur travail à rendre ce projet possible.

Giorgio de Chirico,
La nostalgie de l'infini, 1913

Bibliographie

Mancosu, P. (2015) **Infini, Logique, Géométrie** , Paris: Vrin.

Mancosu, P. (2017) **Abstraction and Infinity**, Oxford: OUP.

Mancosu, P. and Siskind, B., (2019) **"Neologicist Foundations: Inconsistent abstraction principles and part-whole"**, in G. Mras et al. (eds.), *Philosophy of Logic and Mathematics: Proceedings of the 41st International Wittgenstein Symposium*. De Gruyter.

Mancosu, P. (with B. Siskind and S. Shapiro) (2020) **"A note on choice principles in second-order logic"**, *The Review of Symbolic Logic*.

Mancosu, P., (2021) (with K. Easwaran, A. Hájek, and G. Oppy) **"Mathematical Infinity"**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

Région îledeFrance

UNIVERSITÉ PARIS 1 PANTHÉON SORBONNE

MERCI